

1. 定义

广义：凸目标，凸集约束的极小化问题。

一般优化问题： $\min f_0(x)$ 凸函数

凸集 $\left\{ \begin{array}{l} \partial\text{-sublevel set} \\ \text{子空间} \end{array} \right. \quad \text{s.t. } \begin{array}{l} f_i(x) \leq 0, \quad i=1, \dots, m \quad \text{凸函数} \\ a_i^T x = b_i \Leftrightarrow \boxed{h_i(x) = 0}, \quad i=1, \dots, p \quad \text{仿射函数} \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} f_i(x) \leq 0 \\ a_i^T x = b_i \end{array}} \right\} \text{狭义凸问题}$

一些定义： ① $x \in \mathbb{R}^n$, optimization variable

② $f_0: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, 目标函数 objective function,

损失函数 loss function, 效用函数 utility function

③ $f_i(x) \leq 0$ 不等式约束 Inequality constraint

$h_i(x) = 0$ 等式约束 equality constraint

④ $m=p=0$ 无约束 unconstrained

⑤ 优化问题的域 domain: $D = \bigcap_{i=1}^m \text{dom} f_i \cap \bigcap_{i=1}^p \text{dom} h_i$

⑥ 可行解集 feasible set

若 $f_i(x) \leq 0, \quad i=1, \dots, m$

☆ $x \in D$ 为可行解, $h_i(x) = 0, \quad i=1, \dots, p$

$X_f = \{x \text{ 为可行解}\}$

⑦ 问题的最优值 optimal value: $p^* = \inf \{f_0(x) \mid x \in X_f\}$

若 X_f 为空集, $p^* = +\infty$.

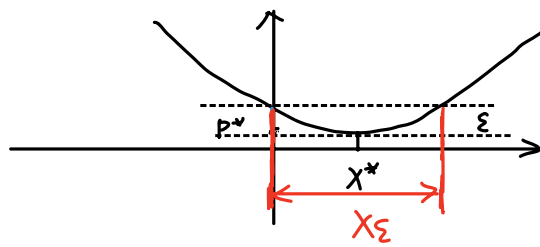
⑧ 最优解 optimal point/solution: 若 x^* 可行, 且 $f_0(x^*) = p^*$.

⑨ 最优解集 optimal set: $X_{\text{opt}} = \{x \mid x \in X_f, f_0(x) = p^*\}$

⑩ ε -次优解集. ε -suboptimal set

补充: satisfying (satisfy + suffice) solutions

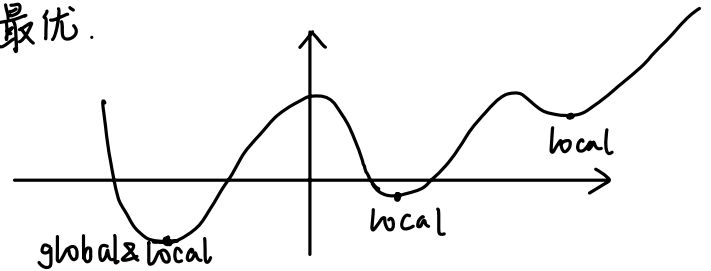
$X_\varepsilon = \{x \mid x \in X_f, f_0(x) \leq p^* + \varepsilon\}$



① 局部最优解 locally optimal

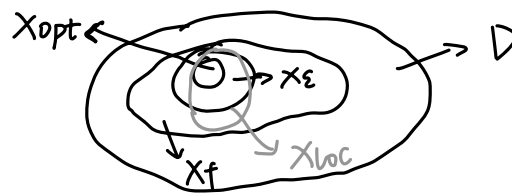
$$f_0(x) = \inf \{ f_0(z) \mid \begin{array}{l} f_i(z) \leq 0, i=1, \dots, m \\ h_i(z) = 0, i=1, \dots, p \\ \|z - x\| \leq R \end{array} \}$$

$\exists R > 0$ 使 x 局部最优.



x_{loc} (局部最优解集)

☆ 各种解之间的关系



☆ why $f_i(x) \leq 0$ rather than $f_i(x) < 0$?

若 $x \in X_f$, $f_i(x) = 0$, 则 $f_i(x) \leq 0$ 为活动约束 (active)

$f_i(x) < 0$, 则 $f_i(x) \leq 0$ 为不活动约束 (inactive)

eg: $\min -\text{utility}$

s.t. $\text{money} \leq 100$ (不能全都花完)

$-\log(100 - \text{money}) \leq 100$ (使用域的方法)

2. 可行性优化问题 feasibility Problems

$$\text{find } x \quad \min \theta$$

$$\text{s.t. } f_i(x) \leq 0, \quad i=1, \dots, m$$

$$h_i(x) = 0, \quad i=1, \dots, p$$

等价问题 例: Box Constraints

$$\min f_0(x)$$

$$\text{s.t. } l_i \leq x_i \leq u_i, \quad i=1, \dots, n$$

$$\left(\begin{array}{l} l_i - x_i \leq 0, \quad i=1, \dots, n \\ x_i - u_i \leq 0, \quad i=1, \dots, n \end{array} \right)$$

例: $\min \partial f_0(x)$ (量纲标准化)

$$\text{s.t. } \partial_i f_i(x) \leq 0, \quad i=1, \dots, m, \quad \partial_i > 0$$

$$\beta_i h_i(x) = 0, \quad i=1, \dots, p, \quad \beta_i \neq 0$$

例: $\varphi_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 单调递增.

$$\varphi_1, \dots, \varphi_m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \varphi_i(u) \leq 0 \Leftrightarrow u \leq 0$$

$$\varphi_1, \dots, \varphi_m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \varphi_i(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

$$\min \varphi_0(f_0(x))$$

$$\text{s.t. } \varphi_i(f_i(x)) \leq 0, \quad i=1, \dots, m$$

$$\varphi_i(h_i(x)) = 0, \quad i=1, \dots, p$$

例: $\min \|Ax - b\|_2$

$$\min \|Ax - b\|_2^2$$

例: 消除等式约束.

$\{h_i(x)=0, i=1, \dots, p\}$ 一组方程, $z \in \mathbb{R}^k$, $\varphi: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x = \varphi(z)$ 代入

$$\min f_0(\varphi(z))$$

$$\text{s.t. } f_i(\varphi(z)) \leq 0, i=1, \dots, m$$

例: 消除线性等式约束. $Ax - b = 0$, $A \in \mathbb{R}^{p \times n} \Leftrightarrow x = \varphi(z)$ { ① 无解 $\rightarrow$ 原问题无解

$z \in \mathbb{R}^{n-r}$ (降维, 降秩) $x = Fz + x_0$ $Ax_0 = b$ 右(由 z 决定的空间) { ② A 可逆, $x = A^{-1}b$

$$\min f_0(Fz + x_0) \quad \text{约束维数减少, 不再有等式约束}$$

$$\text{s.t. } f_i(Fz + x_0) \leq 0, i=1, \dots, m$$

例: $\min f_0(x)$ 是否关于 x 和 s 都是凸的 (联合凸)

$$\text{s.t. } s_i \leq 0, i=1, \dots, m$$

$$f_i(x) - s_i = 0, i=1, \dots, m \quad \text{slack variable}$$

$$a_i^T x = b_i, i=1, \dots, p$$

$$\text{例: } \min f_0(x) = x_1^2 + x_2^2$$

$$\text{s.t. } f_1(x) = \frac{x_1}{1+x_2^2} \leq 0$$

$$h_1(x) = (x_1 + x_2)^2 = 0$$



$$\min f_0(x) = x_1^2 + x_2^2$$

$$\text{s.t. } f_1(x) = x_1 \leq 0$$

$$\tilde{h}_1(x) = x_1 + x_2 = 0$$

☆ 区分 Quasi-convex optimization & Non-convex optimization

3. 重要性质: 局部最优 = 全局最优

① 局部最优: $\exists R > 0, f_0(x) = \inf \{ f_0(z) \mid z \text{ 可行}, \|x - z\| \leq R \}$

证明: (反证法) 设 x 不是全局最优, $\exists y$ 可行, $f_0(y) < f_0(x)$

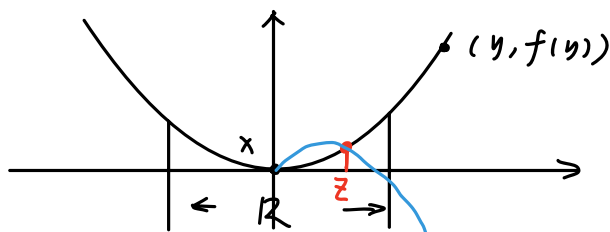
因 x 局部最优 $\|y - x\|_2 > R$

$z = (1-\theta)x + \theta y$, 取 $\theta = \frac{R}{2\|y-x\|_2}$ (由于 $\theta \in (0,1)$, 则 z 必为凸组合)

z 可行, 且 $f_0(z) \leq (1-\theta)f_0(x) + \theta f_0(y) < f_0(z)$

$\|z - x\|_2 = \theta \|x - y\|_2 = \frac{R}{2} < R$, then $f_0(x) \leq f_0(z)$

$f_0(y) < f_0(x) \leq f_0(z)$, 与上述条件矛盾.



(y, f(y)) 只要 $f(y)$ 低于 $f(x)$, 则 f 不为凸

② 可微目标函数情况下的最优性

f_0 可微, 则 f_0 凸 $\Leftrightarrow \text{dom } f_0$ 为凸, $f_0(y) \geq f_0(x) + \nabla f_0^T(x)(y-x)$, $\forall x, y \in \text{dom } f_0$

设凸问题可行域 $X_f = \{x \mid \begin{matrix} f_i(x) \leq 0, i=1, \dots, m \\ h_i(x) = 0, i=1, \dots, p \end{matrix} \} \cap \text{dom } f_0$

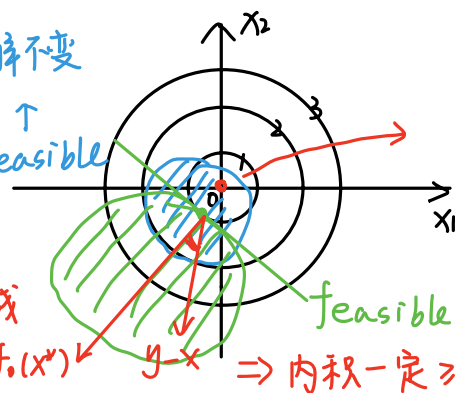
$x^* \in X_f$ 最优 $\Leftrightarrow \nabla f_0^T(x^*)(y-x^*) \geq 0, \forall y \in X_f$

直观解释: 令 $\text{dom } f_0 \triangleq X_f$, 则 $\exists x^*, \forall y \in \text{dom } f_0$

若 $f(x^*)$ 最小, 则 $f_0(y) \geq f_0(x^*)$, 则 $\nabla f_0^T(x^*)(y-x^*) \geq 0$

最优解不变

feasible



可微. 一阶偏导等于0

且在 $\text{dom } f$, 则必为全局最优解

梯度方向(与切线

垂直的方向) $\nabla f_0(x^*) \cdot (y-x^*) \Rightarrow$ 内积一定 ≥ 0

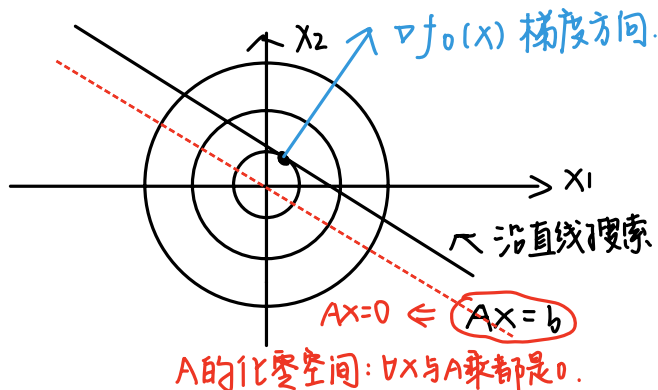
例: 约束仅为等式约束

$$\min f_0(x), \text{ dom } f_0 = \mathbb{R}^n$$

$$\text{s.t. } Ax=b$$

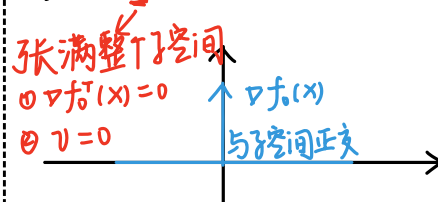
若 $\exists x, Ax=b, x$ 最优 $\Leftrightarrow \exists y, Ay=b$

$$\Rightarrow \nabla f_0^T(x)(y-x) \geq 0$$



$$Ax=b, Ay=b \Rightarrow y=x+v, v \in N(A)$$

$$\nabla f_0^T(x)v \geq 0, \forall v \in N(A) \quad A \text{ 的化零空间}$$



$$\textcircled{1} v=0, \text{ 则 } A \text{ 可逆}, x=A^{-1}b$$

$$\textcircled{2} \nabla f_0(x) \text{ 与 } N(A) \text{ 正交}$$

例: 约束仅为非负约束

$$\min f_0(x)$$

$$\text{s.t. } x \geq 0$$

若 $\exists x \geq 0, x$ 最优 $\Leftrightarrow \forall y \geq 0, \nabla f_0^T(x)(y-x) \geq 0$

$$\text{即 } \nabla f_0^T(x)y - \nabla f_0^T(x)x \geq 0$$

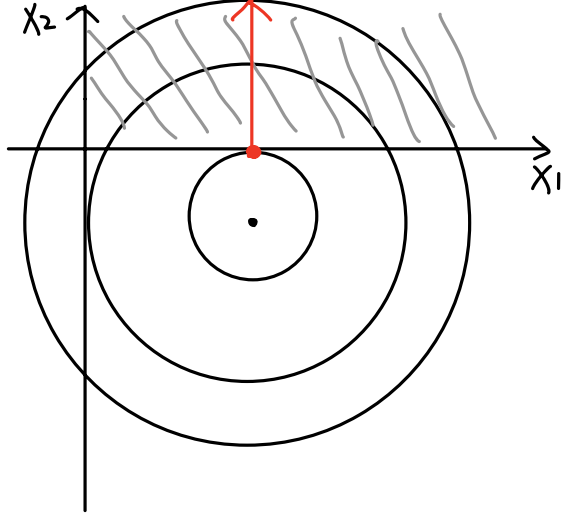
$\textcircled{1}$ 若 $\nabla f_0^T(x)_i < 0$, 则 $\nabla f_0^T(x)y$ 必可取到无穷小. 则必有 $\nabla f_0^T(x) \geq 0$

$$\left. \begin{array}{l} \textcircled{2} \forall y \text{ 均有 } \nabla f_0^T(x)(y-x) \geq 0 \Rightarrow \nabla f_0^T(x)x \leq 0 \\ \textcircled{3} \nabla f_0^T(x) \geq 0, x \geq 0 \Rightarrow \nabla f_0^T(x)x \geq 0 \end{array} \right\} \nabla f_0^T(x)x = 0$$

总结: 如果 x 是最优解, 则 $\begin{cases} x \geq 0 \\ \nabla f_0(x) \geq 0 \\ (\nabla f_0(x))_i x_i = 0 \end{cases}$

Complementarity

互补条件



最优解的直观理解: 能使等高线到达最低.

$$x_1 > 0, x_2 = 0$$

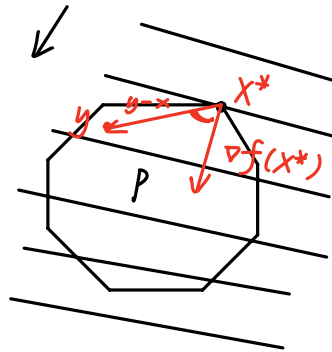
$$(\nabla f_0(x))_1 = 0, (\nabla f_0(x))_2 > 0$$

4. 典型凸问题

$$\begin{array}{llll}
 \text{(1) 线性规划} & \min c^T x + d & C \in \mathbb{R}^n, d \in \mathbb{R} & \text{仿射} \\
 & \text{s.t. } Gx \leq h & G \in \mathbb{R}^{m \times n}, h \in \mathbb{R}^m & \text{仿射} \\
 & Ax = b & A \in \mathbb{R}^{k \times n}, b \in \mathbb{R}^k & \text{仿射}
 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}} \right\} \text{凸问题}$$

目标与约束均为线性 linear program (LP问题)

历史: 1930-1940 调度问题 Dantzig、Von Neumann、Kantorovich



$\nabla f(x^*)(y-x)$ 一定非负.

$$\begin{array}{ll}
 \text{(等价变换)} & \min c^T x + d \\
 \text{s.t. } & Gx + S = h \\
 & Ax = b \\
 & S \geq 0
 \end{array} \iff \begin{array}{l} \min c^T x^+ - c^T x^- + d \\ G_1 x^+ - G_1 x^- + S = h \\ Ax^+ - Ax^- = b \\ S \geq 0, x^+ \geq 0, x^- \geq 0 \end{array}$$

$$\text{eg: } x = [1, -1, 2, -2]^T, x^+ = [1, 0, 2, 0]^T, x^- = [0, 1, 0, 2]^T$$

$$x = x^+ - x^-, x^+, x^- \geq 0$$

$$\begin{cases} \min & C^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{cases} \quad (\text{linprog 函数的命名规则})$$

例：食谱问题.

一份健康的饮食包含 m 种不同的营养，每种至少需要 $b_1, \dots, b_m$ 。我们可以从 n 种食物中选择非负的量 $x_1, \dots, x_n$ 以构成一份食谱。单位第 j 种食品含有营养 i 的量为 a_{ij} ，而价格为 c_j 。我们希望设计出一份最便宜的满足营养需求的食谱。这一问题可以描述为线性规划

目标：单位食物价格 c_j ，找到总价最低的食谱。

$$\begin{aligned} \min & \sum_{j=1}^n c_j x_j & \min & [c_1 \dots c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ \text{s.t.} & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, i=1, \dots, m & \xrightarrow{\text{向量形式}} & \text{s.t.} \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \\ & x_j \geq 0, j=1, \dots, n & & \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \geq 0 \end{aligned}$$

(2) 线性分数规划 linear fractional programming

$$(P_0) \quad \min f_0(x)$$

$$\text{s.t.} \quad Gx \leq h$$

$$Ax = b$$

$$f_0(x) = \frac{c^T x + d}{e^T x + f} \quad \text{是拟凸函数, 不是凸函数}$$

$$\text{dom} f_0 = \{x \mid c^T x + f > 0\}$$

$$(P_1) \quad \min c^T x + dz$$

$$\text{s.t.} \quad Gy - hz \leq 0$$

$$Ay - bz = 0$$

$$e^T y + fz = 1$$

$$z \geq 0$$

验证：① x^* 是 P_0 的 optimal $\Leftrightarrow y^*, z^*$ 是 P_1 的 optimal

② $\forall x$, 能找到 y, z 对于 P_1 可行, 且函数值相等

$\forall y, z$, 能找到 x 对于 P_0 可行, 且函数值相等

证明: 1) 若 x 在 P_0 可行. 取 $y = \frac{x}{e^T x + f}$, $z = \frac{1}{e^T x + f}$

$$\begin{cases} Gx \leq h \\ Ax = b \\ e^T x + f > 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} Gy - hz &= \frac{Gx - h}{e^T x + f} \leq 0 \\ Ay - bz &= \frac{Ax - b}{e^T x + f} = 0 \\ e^T x + f z &= 1 \end{aligned}$$

$$e^T x + f z = 1$$

$$z \geq 0$$

$$\text{目标函数值都} = \frac{c^T x + d}{e^T x + f}$$

2) 若 y, z 在 P_1 中可行

若 $z > 0$, 则 $x = \frac{y}{z}$, then x 在 P_0 中可行且两问题在目标函数相同.

若 $z = 0$, 设 x_0 为 P_0 可行解, 则 射线 $x = x_0 + ty$ 对 P_0 可行, $\forall t \geq 0$

$$Gy \leq 0, Ay = 0, e^T y = 1,$$

$$Gx = Gx_0 + tGy \leq h$$

$$Ax = Ax_0 + tAy = b$$

$$e^T x + f = e^T x_0 + f + te^T y > 0$$

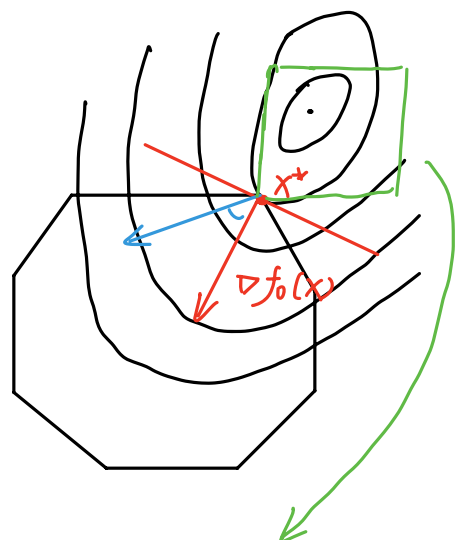
$$f_0(x) = f_0(x_0 + ty) = \frac{c^T x_0 + c^T ty + d}{e^T x_0 + e^T ty + f} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} c^T y$$

(3) 二次规划 Quadratic Programming

$$\min \frac{1}{2} x^T P x + q^T x + r, P \in S_+^n$$

$$\text{s.t. } Gx \leq h$$

$$Ax = b$$



最优解不一定在边缘 or 顶点

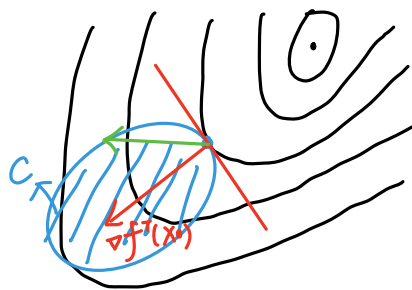
还可能在集合内部.

(4) 二次约束二次规划 QCP

$$\min \frac{1}{2} x^T P x + q^T x + r$$

$$\text{s.t. } \frac{1}{2} x^T P_i x + q_i^T x + r_i \leq 0$$

$$A x = b$$



例：带噪声的测量系统 $b = A x + e$ 待测量向量

$$\hat{x} = \arg \min_x \|b - A x\|_2 = \arg \min_x \|b - A x\|_2^2$$

$$= \arg \min_x x^T \underbrace{A^T A}_{\text{半正定}} x - 2 b^T A x + b^T b \quad (\text{无约束的QP问题})$$

$$= (A^T A)^{-1} A^T b \quad (-\text{阶偏导}=0 \text{ 来计算})$$

(推广) 若 x 稀疏 Lasso

$$\hat{x} = \arg \min_x \|b - A x\|_2^2 + \lambda_0 \|x\|_0 \quad \text{非凸函数(用凸近似)}$$

$$\text{凸问题/QP} \Leftarrow = \arg \min_x \|b - A x\|_2^2 + \lambda_1 \|x\|_1 \quad (L_1\text{-Regulanzed Least squares})$$

$$(\text{技巧: } x = x^+ - x^-) \star = \arg \min_{x^+, x^-} \|b - A x^+ + A x^-\|_2^2 + \lambda_1 \|x^+ - x^-\|_1 + \lambda_1 1^T x^+ - \lambda_1 1^T x^-$$

非光滑 $\rightarrow$ 光滑可微

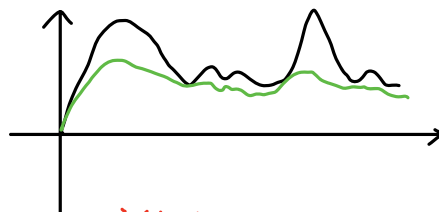
$$\text{s.t. } x^+, x^- \geq 0 \quad (\text{本质是二次规划问题})$$

(再推广) x 中元素幅度类似 $\star L_2\text{-regulanzed least square}$ $\star$ 岭回归

判断二次项是否
一定是正定矩阵

$$\hat{x} = \arg \min_x \|b - A x\|_2^2 + \lambda_2 \|x\|_2^2$$

$$\text{半正定 } \underbrace{A^T A}_{\Delta} + \lambda_2 I \quad \lambda_2 > 0, \text{ 正定} \Rightarrow \text{确认二次规划}$$



$$\text{QCP问题} \Leftarrow = \arg \min_x \|b - A x\|_2^2 \Leftrightarrow \text{转化: } \forall \lambda_2 > 0, \text{ 一定能找到 } \theta$$

$$\text{s.t. } \|x\|_2^2 \leq \theta^2$$

使两个问题最优解一样

例：投资组合问题

B	Bucket	
	beginning	ending
#1	x_1	$p_1 x_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
#n	x_n	$p_n x_n$

$$\max \quad \underline{p}_1 x_1 + \dots + \underline{p}_n x_n$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + \dots + x_n \leq B$$

$$x_1, \dots, x_n \geq 0$$

$$\text{eg: } \bar{p}^T = [1.05, 1.05, 1], \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 1.2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\min \quad x^T \Sigma^{-1} x \quad (1952, \text{Markowitz}) \Rightarrow \text{出名要趁早.}$$

$$\text{s.t.} \quad \bar{p}^T x \geq r_{\min}$$

$$1^T x = B$$

$$x \geq 0$$

(5) 半正定规划 Semi-Definite Programming SDP

$$\min \quad \text{tr}(CX) \quad \text{矩阵空间的线性规划} \quad (\text{优化矩阵})$$

$$\text{s.t.} \quad \text{tr}(A_i x) = b_i, \quad i=1, \dots, p$$

$$x \geq 0$$

$$x \in S_+^n, \quad C \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad b_i \in \mathbb{R}$$

$$\text{eg: 特例. 对角矩阵 } \text{diag}\{x\}$$



$$\min \quad (\text{diag}\{c\})^T \text{diag}\{x\}$$

$$\text{s.t.} \quad (\text{diag}\{A_i\})^T \text{diag}\{x\} = b_i, \quad i=1, \dots, p$$

$$\text{diag}\{x\} \geq 0$$

$$\min C^T x \quad (\text{优化向量})$$

$$\text{s.t. } x_1 A_1 + \dots + x_n A_n \preceq B \quad \text{半正定约束, 左-右=非正定矩阵}$$

$$x \in \mathbb{R}, B, A_1, \dots, A_n \in \underline{S}^k, C \in \mathbb{R}^n \quad \text{对称的 } k \text{ 维的矩阵}$$

$$\text{例: } A(x) = A_0 + x_1 A_1 + \dots + x_n A_n$$

$$A_i \in \mathbb{R}^{p \times q}, i=0, \dots, n, x \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{谱范数 } \|A(x)\|_2, \text{ 即 } A(x) \text{ 最大的奇异值} \rightarrow A^T(x) A(x)$$

$$\min \|A(x)\|_2$$

$$\text{补充线性: } \|A(x)\|_2 \leq \sqrt{s}, s > 0 \Leftrightarrow A^T(x) A(x) - \underline{s} I \preceq 0 \quad \text{标量}$$

$$\begin{bmatrix} \diagdown \\ \diagup \end{bmatrix} \quad (\text{用对角矩阵直观理解})$$

$$\min \sqrt{s}$$

$$\text{s.t. } \underbrace{A^T(x) A(x)}_{\text{凸函数}} \preceq \underline{s} I \quad \text{线性} \quad \text{二次项系数是半正定矩阵}$$

$$\Leftrightarrow \forall \sqrt{s} = t$$

$$\min t$$

$$\text{s.t. } A^T(x) A(x) - \underline{t^2 I} \preceq 0 \quad \Leftrightarrow \text{s.t. } \begin{bmatrix} tI & A(x) \\ A^T(x) & tI \end{bmatrix} \succeq 0$$

$$t \geq 0 \quad \text{非凸, 很难}$$

$$t \geq 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\min t \quad \text{转化成标准的SDP问题}$$

$$\text{s.t. } Y = \begin{bmatrix} tI & A(x) \\ A(x) & tI \end{bmatrix} \succeq 0$$

$$Y \succeq 0 \quad \text{半正定}$$

$$t \geq 0$$

(6) 多目标优化问题

$$\min f_0(x)$$

$$\text{s.t. } f_i(x) \leq 0, \quad i=1, \dots, m$$

$$h_i(x) = 0, \quad i=1, \dots, p$$

$$f_0: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q, \quad f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad h_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

例：投资组合问题 $\min \text{Risk}$

$\min -\text{income}$

s.t. Resources

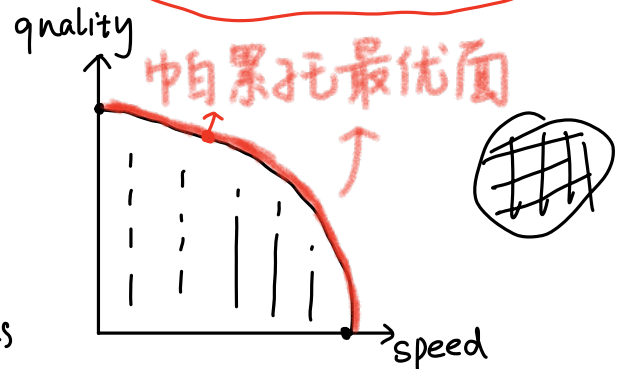
包含两个目标函数值和一个最优策略（帕累托最优值、点）

例：又好又快发展

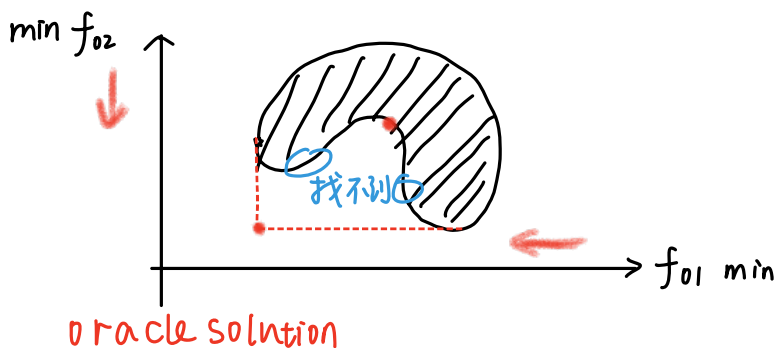
$\min -\text{speed}$

$\min -\text{quality}$

s.t. resources



$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pareto optimal front: 任意点, 若能找到另一解, 在某指标更优, 则其他更差.} \\ \text{Pareto optimal value/point: 对应的值和点.} \end{array} \right.$



不要试图解多目标优化

将其转化为单目标

若 $\{f_0(x)\}$ 在 $\mathbb{R}^k$ 中为凸, $f_i(x)$ 为凸, $h_i(x)$ 为仿射, 则必可以通过下述方法求得 Pareto front 中一点

$$\min \sum_{i=1}^n \lambda_i f_{0i}(x) \quad \lambda_i \geq 0$$

$$\text{s.t. } f_i(x) \leq 0, \quad i=1, \dots, m$$

$$h_i(x) = 0, \quad i=1, \dots, p$$

通过遍历 $\{\lambda_i\}$ 可找出所有点。

例: Ridge Regression

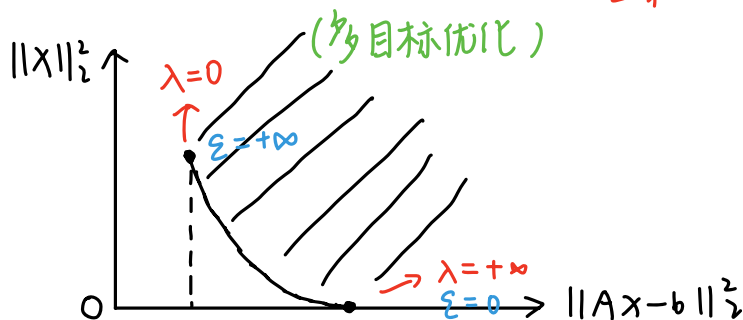
$$b = Ax + e, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad b \in \mathbb{R}^m, \quad e \in \mathbb{R}^m, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$$\min \|b - Ax\|_2^2 \quad \text{① 误差平方和最小} \quad \Leftrightarrow \min \|b - Ax\|_2^2 + \lambda \|x\|_2^2$$

$$\min \|x\|_2^2$$

② x 的能量最小。

(标准岭回归)



☆ 通过拉格朗日乘子联系起来。

有约束 $\rightarrow$ 无约束。

$$\min \|b - Ax\|_2^2$$

(岭回归的等价形式)

$$\text{s.t. } \|x\|_2^2 \leq \varepsilon$$